从行列式的性质看行列式的定义

厦门大学数学科学学院　林亚南

2013年11月30日　集美大学

一. 行列式的若干定义

二. 行列式的基本定义

三. 行列式基本性质的证明

四. 关于$|AB| = |A||B|$的证明

五. 行列式的更多等价定义

一. 行列式的若干定义

定义1(代数和) 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$. 则

$$|A|=\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)}(-1)^{\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

这里$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$取遍$1,2,\cdots,n$的所有全排列. 同样,

$$|A|=\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}(-1)^{\sigma(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn},$$

这里$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$取遍$1,2,\cdots,n$的所有全排列.

定义2(归纳法) 一阶方阵$A=(a)$的行列式定义为数a. 设$n-1$阶方阵的行列式已经定义, 我们定义n阶方阵A的行列式为

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{n1}A_{n1}.$$

线性代数(第三版), 卢刚主编, 高等教育出版社, 2009年:

行列式定义为$|A| = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni}$.

定理 设A可逆, 则

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中A_1是可逆矩阵.

定义3(正规表示) 若A不可逆, 定义

$$|A| = 0;$$

若A可逆, 定义

$$|A| = a|A_1|.$$

注3 证明定义的合理性.

J.R.Silvester, Introduction to Algebraic K-Theory, London: Chapman-Hall, 1981

游宏, 朱广俊, 线性代数, 高等教育出版社, 2012

定义4(函数法1)　设$\varphi: F^{n\times n}\to F$是映射且满足:

(1) $\varphi(E)=1$;

(2) 将A的任意两列互换变为B, 则$\varphi(B)=-\varphi(A)$;

(3) 将A的任意一列变乘以非零数c变为B, 则$\varphi(B)=c\varphi(A)$;

(4) A,B,C是三个n阶方阵, C的第r列元素等于A的第r列元素与B的第r列元素之和, 其余元素相同, 则$\varphi(A)=\varphi(B)+\varphi(C)$,

则称φ为行列式函数, $\varphi(A)$为A的行列式.

注　φ是F^n上规范反称的n重线性函数.

定义5(函数法2) 设$\varphi : F^{n\times n} \to F$是**列线性函数**且满足:

(1) 对于不满秩的A, 有$\varphi(A) = 0$;

(2)$\varphi(E) = 1$,

则称φ为行列式函数, $\varphi(A)$为A的行列式.

蓝以中, 高等代数简明教程(第二版), 北京大学出版社, 2007

定义6(函数法3)　设$\varphi: F^{n\times n}\to F$是映射且满足:

(1) 对于上三角方阵$A=(a_{ij})$, 有$\varphi(A)=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$;

(2)$\varphi(AB)=\varphi(A)\varphi(B)$,

则称φ为行列式函数, $\varphi(A)$为A的行列式.

陈昭木等, 高等代数, 福建教育出版社, 1991

二. 行列式的基本性质

数乘性质　将行列式$\det A$的某一列乘以常数c得到行列式$\det B$, 则$|B| = c|A|$.

互换性质　交换行列式的两列,行列式值改变符号.

消法性质　将A的任意一列加到另外一列上去变为B, 则$|B| = |A|$.

拆分性质 A,B,C是三个n阶方阵, C的第r列元素等于A的第r列元素与B的第r列元素之和, 其余元素相同,则

$$|C| = |A| + |B|.$$

展开性质 行列式$\det A$按第r列展开

$$\det A = a_{1r}A_{1r} + a_{2r}A_{2r} + \cdots + a_{nr}A_{nr}.$$

转置性质 行列式转置后值不变, 即$|A^T| = |A|$.

乘积性质 $|AB| = |A||B|.$

推论 设A是n阶行列式, 则有

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases}\det A & k=i\\ 0 & k\neq i\end{cases};$$

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases}\det A & l=j\\ 0 & l\neq j\end{cases}.$$

注 $AA^*=A^*A=|A|E.$

三. 行列式性质的证明

互换性质+拆分性质$\Rightarrow$消法性质

消法性质+数乘性质$\Rightarrow$互换性质

在拆分性质的前提下,

互换性质$\Leftrightarrow$ ”行列式的两列对应元素相同,行列式为零”

1. 用代数和的定义证明行列式的性质

容易得到转置性质, 互换性质, 数乘性质, 拆分性质, (因而得到消法性质).

展开性质按照利用引理和拆分性质,数乘性质.

引理

$$
A_{ij} = \left|\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{in} \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right|
$$

注 有的教材先证Laplace定理, 特例是展开性质.

许以超: 代数学引论, 上海科学技术出版社,1966年

谢邦杰：线性代数,高等教育出版社, 1977

2. 由代数和的定义, 结合以上方法证明行列式的性质

用定义证明转置性质.

用定义说明

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

其中,A_{ij}代表那些含有a_{ij}的项提取出a_{ij}后的代数和, 与第i行元素无关.

由此证明数乘性质, 拆分性质.

由定义证明"行列式两行元素对应相等,则行列式为零", 结合拆分, 证明消法性质. 同时得到互换性质.

展开性质按照利用引理和拆分性质, 数乘性质.

3. 用归纳法的定义(第一列展开定义)证明行列式的性质1

容易得到行与列的数乘性质, 行的互换性质, 行和列的拆分性质,(因而得到行的消法性质). 推导"两列对应元素相同，行列式为零" ,因而得到列的消法性质, 得到列的互换性质,进一步得到列的展开性质.

利用第一行拆分和列的展开性质,得到第一行的展开式子. 进而得到行的展开性质)和转置性质).

注　有的教材先证方阵A可以经消法变换化为对角矩阵. 由此证明行列式的转置性质.

4. 用归纳法的定义(第一列展开定义)证明行列式的性质2

证明列的性质. 容易得到数乘性质, 拆分性质.

证明互换性质用到$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n}$. 因而得到消法性质.

证明提要　若交换的两列不含第1列, 由归纳法即得.

若$\det A$的第1列与第2列交换后的行列式为$\det B$, 设B的第(i,j)元素为b_{ij}, 相应的余子式为N_{ij}. 另外,当$1 \le i < j \le n$时, 在$\det A$中去掉第i行,第j行以及第1列,第2列后剩下的元素按照原先的相对位置构成的$n-2$阶行列式记为$M\begin{bmatrix} i & j \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. 则

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}N_{i1} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i2}M_{i2} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i2}\left(\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{j+1}a_{j1}M\begin{bmatrix} j & i \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{(j-1)+1}a_{j1}M\begin{bmatrix} i & j \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{i+j}a_{i2}a_{j1}M\begin{bmatrix} j & i \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{i+j+1}a_{i2}a_{j1}M\begin{bmatrix} i & j \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{i+j+1}a_{j1}a_{i2}M\begin{bmatrix} i & j \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j}a_{j1}a_{i2}M\begin{bmatrix} j & i \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= -\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{j1}\left(\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{i+1}a_{i2}M\begin{bmatrix} i & j \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{(i-1)+1}a_{i2}M\begin{bmatrix} j & i \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) \\
&= -\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{j1}M_{j1} \\
&= -\det A
\end{aligned}$$

这样,互换相邻两列,行列式改变符号.

对于连加号的交换规律$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}$, 只要对下面的所列出的数做和,

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\
 & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\
 & & & & a_{n-1,n}
\end{array}
$$

按照上面求法, 先对行求和再求总和，先对列求和再求总和即得到.

列展开性质用到互换性质和定义.

证明转置性质用到

引理1　行列式的第一行全为0, 则行列式为0.

引理2　行列式可用第一行展开.

5. 用归纳法的定义(第一列展开定义)证明代数和1

证明提要 记ε_i为标准单位列向量. 利用拆分性质和数乘性质,得到

$$|A| = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} |\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \cdots, \varepsilon_{i_n}|.$$

而

$$|\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \cdots, \varepsilon_{i_n}| = (-1)^{\sigma(i_1, i_2, \cdots, i_n)} |\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n|.$$

注 这也是用函数法1定义的行列式导出代数和式子的方法.

6. 用归纳法的定义(第一列展开定义)证明代数和2

证明提要 对阶数做数学归纳法. 首先$\det A = \sum\limits_{1\le i\le n}(-1)^{n+i}a_{ni}M_{ni}$. 记$M_{ni} = \det(b_{kl})$, 其中$1\le k,l\le n-1$. 由归纳假设知,

$$\det M_{ni} = \sum_{(l_1,l_2,\cdots,l_{n-1})}(-1)^{\sigma(l_1,l_2,\cdots,l_{n-1})}b_{1l_1}b_{2l_2}\cdots b_{n-1,l_{n-1}},$$

这里$(l_1,l_2,\cdots,l_{n-1})$取遍$1,2,\cdots,n-1$的所有全排列. 注意到, 当$l<i$时, $b_{kl}=a_{kl}$; 当$l\ge i$时, $b_{kl}=a_{k,l+1}$, 故有$b_{1l_1}b_{2l_2}\cdots b_{n-1,l_{n-1}} = a_{1i_1}a_{2l_2}\cdots a_{n-1,i_{n-1}}$, 其中, 当$l_h<i$时, $i_h=l_h$; 当$l_h\ge i$时, $i_h=l_{h+1}$. 因为$\sigma(l_1,l_2,\cdots,l_{n-1}) = \sigma(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})$,所以$M_{ni} = \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})}(-1)^{\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})}a_{1i_1}a_{2l_2}\cdots a_{n-1,i_{n-1}}$, 其中$(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})$取遍$1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n$的所有全排列. 这样

$$|A| = \sum_{1\le i\le n}(-1)^{n+i}a_{ni}\Big(\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})}(-1)^{\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{n-1,i_{n-1}}\Big)$$

$$= \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i)}(-1)^{(n+i)+\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{n-1,i_{n-1}}a_{ni}$$

$$= \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i)}(-1)^{(n-i)+\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{n-1,i_{n-1}}a_{ni}$$

$$= \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i_n)}(-1)^{(n-i_n)+\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{n-1,i_{n-1}}a_{ni_n}$$

$$= \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)}(-1)^{\sigma(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}\cdots a_{ni_n}.$$

7. 用规范式定义证明行列式的性质

先证$|AB| = |A||B|$.

这样, 有数乘性质, 互换性质, 消法性质.

拆分性质: 分情况+对阶数归纳

关于展开性质, 转置性质?

如何从规范式的定义导出代数和的式子?

8. 用行列式函数定义2证明行列式的性质

先证行列式函数的唯一性.

再证"对于非可逆矩阵A, $\varphi(A) = 0$"与互换性质等价.

这样,有拆分性质, 数乘性质, 互换性质,(导出消法性质).

关于展开性质, 定义ψ为归纳法定义, 证明它满足行列式函数定义的条件,根据唯一性,$\varphi = \psi$, 得到展开性质.

同理证明转置性质.

9. 映射法2证明代数和式子

定义$\psi(A)$为代数和定义的行列式, 证明它是满足以下条件的列的线性函数,

(1) 对于不满秩的A, 有$\varphi(A) = 0$;

(2)$\varphi(E) = 1$,

根据行列式函数的唯一性,得到$\psi = \varphi$.

10. 映射法3证明行列式的性质

首先, 自然$|AB| = |A||B|$. 所以成立互换性质, 数乘性质, (因而得到消法性质).

用$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得到转置性质.

另外证明拆分性质, 展开性质.

Home Page

Title Page

Page 29 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

四. 关于$|AB| = |A||B|$的证明

法一: 利用矩阵的初等变换1

证明提要　对行列式做行的初等变化化为下三角矩阵. 对于初等矩阵P, 有$|PA| = |A| = |AP|$. 所以

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ E & B \end{vmatrix} = |A||B|.$$

法二: 利用矩阵的初等变换2

证明提要 当$r(A) < n$时, $|A| = 0$. 而$r(AB) \le r(A) < n$, 所以$|AB| = 0$.

当$r(A) = n$时,首先证明对于初等矩阵P, 有$|PB| = |P||B|$. 而A可以表为有限个初等矩阵的乘积.

法三: 利用矩阵的初等变换3

证明提要首先证明对角矩阵D, 有$|DB| = |D||B|$. A可以通过行和列的消法变换化为对角矩阵D. 而对于消法矩阵T, 总有$|TB| = |BT| = |B|$.

法四: 利用矩阵的初等变换4

证明提要A可以通过行的初等变换化为上三角矩阵. 而对于初等矩阵P, 总有$|PB| = |B| = |BP|$.

法五: 利用矩阵的初等变换5

证明提要

A可以通过行的初等变换化为

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

对于初等矩阵P, 总有$|PB| = |B| = |BP|$.

$$\begin{vmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} 1 & 当 r = n \\ 0 & 当 r = n \end{cases}.$$

法六: 利用Laplace定理

证明提要

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & AB \\ -E & B \end{vmatrix}.$$

Home Page

Title Page

Go Back

Full Screen

Close

Quit

法七:

证明提要

$$|A||B| = \begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & AB \\ -E & B \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} -E & B \\ 0 & AB \end{vmatrix} = |AB|.$$

法八: 利用行列式代数和的定义直接证明

证明提要

$$
|AB| = \begin{vmatrix}
\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} b_{j_1 1} & \sum_{j_2=1}^{n} a_{1j_2} b_{j_2 2} & \cdots & \sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_n} b_{j_n n} \\
\sum_{j_1=1}^{n} a_{2j_1} b_{j_1 1} & \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} b_{j_2 2} & \cdots & \sum_{j_n=1}^{n} a_{2j_n} b_{j_n n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum_{j_1=1}^{n} a_{nj_1} b_{j_1 1} & \sum_{j_2=1}^{n} a_{nj_2} b_{j_2 2} & \cdots & \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} b_{j_n n}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n} \begin{vmatrix}
a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\
a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \Big(\sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n} \Big) \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = |A||B|.
$$

李炯生,查建国, 线性代数,中国科技大学出版社, 1989年
张远达：行列式论与矩阵论,商务印书社, 1954年
R.F.Scott, 行列式之理论及其应用(1880年),黄缘芳译,商务印书馆, 1925年

法九: 用正规表示的定义证明

定理 设A可逆, 则

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中A_1是可逆矩阵.

定义3(正规表示) 若A不可逆, 定义

$$|A|=0;$$

若A可逆, 定义

$$|A|=a|A_1|.$$

J.R.Silvester, Introduction to Algebraic K-Theory, London: Chapman-Hall, 1981
游宏, 朱广俊, 线性代数, 高等教育出版社, 2012

证明提要 若AB有一个不可逆, 则$|AB|=0=|A||B|$. 若A,B均可逆, 则

$$AB=\begin{pmatrix} A_1 & \alpha_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & \gamma_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 & \alpha_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & \gamma_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1 & \alpha_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 & \alpha_2+\gamma_1 a_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & \gamma_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1 & \alpha_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & \alpha_2' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & \gamma_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1A_2 & \alpha_1' \\ 0 & a_1a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ \beta_1' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & \alpha_2' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & \gamma_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1A_2 & \alpha_1' \\ 0 & a_1a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & \alpha' \\ 0 & a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ \beta' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & \gamma' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & \gamma_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1A_2M & \alpha_1'' \\ 0 & a_1a_2a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ \beta' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & \gamma'' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以$|AB|=a_1a_2a'|A_1A_2M|=a_1|A_1|a_2|A_2|a'|M|=a_1|A_1|a_2|A_2|=|A_1||A_2|$.

法十:

证明提要　若$|B|=0$, 则齐次线性方程组$BX=0$有非零解,所以$ABX=0$有非零解,故$|AB|=0$.

若$|B|\neq 0$, B可表为若干个初等矩阵之积. 由行列式的性质,存在一个与A无关的数λ, 使得

$$|AB|=\lambda|A|.$$

取$A=E$, 得到$\lambda=|B|$. 故$|AB|=|A||B|$.

A.Lauve, The Cauchy-Binet formula,2004

五. 行列式的更多等价定义

定理　设A可逆, 则存在可逆矩阵P, 使得PA为上三角矩阵.

定义7(上三角方法)　记上面上三角矩阵的对角线元素为$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$, 定义

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, 4th Edition, Wisley-Cabridge Press, 2009

西安电子科大陈怀琛: 用主元法乘法定义行列式

行列式的计算方法随定义而定. 行列式的三种定义方法所需要乘法次数

阶数	2	5	25
代数和	2	480	$3.7227e+026$
归纳法	2	205	$3.1022e+025$
主元法	3	41	5208

定义8(函数法4) 设$\varphi: F^{n\times n} \to F$是函数且满足:

(1) $\varphi(A_1, \cdots, cA_i, \cdots, A_n) = c\varphi(A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_n)$;

(2) $\varphi(A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_j, \cdots, A_n) = c\varphi(A_1, \cdots, A_i + A_j, \cdots, a_j.cdots, A_n)$;

(3) $\varphi(E) = 1$,

则称φ为行列式函数, $\varphi(A)$为A的行列式.

A.I.Kostrikin, Introduction to Algebra (I), 2001 (张英伯译)

定义9(函数法5) 设$\varphi : F^{n\times n} \to F$是函数且满足:

(1) 若A有一列为零, 则$\varphi(A) = 0$;

(2) 若A经过列的消法变换化为B, 则$\varphi(A) = \varphi(B)$;

(3) 若$A = \mathrm{diag}\{a, 1, \cdots, 1\}$, 则$\varphi(A) = a$,

则称φ为行列式函数, $\varphi(A)$为A的行列式.

A.I.Kostrikin, Introduction to Algebra (I), 2001 (张英伯译)

谢 谢！